MATHEMATICS

ESPACES LOCALEMENT K-CONVEXES. III

PAR

J. VAN TIEL

(Communicated by Prof. T. A. SPRINGER at the meeting of October 31, 1964)

ESPACES D'APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

Dans ce chapitre, E et F désigneront des espaces localement K-convexes.

§ 1. *Parties équicontinues de $\mathscr{L}(E, F)$.*

Désignons par $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. Soient $\mathscr{V}$ un système fondamental de voisinages de 0 dans F, $\mathfrak{S}$ un recouvrement de E formé de parties bornées. Sur $\mathscr{L}(E, F)$ nous définissons une topologie $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ de la façon suivante: un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ est formé des ensembles $\bigcap_{i=1}^{n} W(A_i, V_i)$, où $n \in \mathbf{N}$, $A_i \in \mathfrak{S}$, $V_i \in \mathscr{V}$ $(i=1, \ldots, n)$, $W(A, V) = \{f \in \mathscr{L}(E, F) | f(A) \subset V\}$. L'espace $\mathscr{L}(E, F)$, muni de la topologie $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$, est un espace localement K-convexe (voir [2], [18]). On appelle $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ la $\mathfrak{S}$-topologie sur $\mathscr{L}(E, F)$, ou la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$ sur $\mathscr{L}(E, F)$.

Comme dans le cas réel, on ne change pas la $\mathfrak{S}$-topologie sur $\mathscr{L}(E, F)$ lorsqu'on remplace $\mathfrak{S}$ par l'un des ensembles de parties suivants: 1°. l'ensemble des réunions finies d'ensembles de $\mathfrak{S}$; 2°. l'ensemble des parties des ensembles de $\mathfrak{S}$; notons que cet ensemble contient les intersections finies d'ensembles de $\mathfrak{S}$; 3°. l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'ensembles de $\mathfrak{S}$; 4°. l'ensemble des enveloppes K-convexes d'ensembles de $\mathfrak{S}$; 5°. l'ensemble des adhérences des ensembles de $\mathfrak{S}$. Nous démontrons 3°: si $\lambda, \mu \in K$, $\mu \neq 0$, $|\lambda| \leqslant |\mu|$, $A, B \in \mathfrak{S}$, $V \in \mathscr{V}$, $f \in W(A \cup B, \mu^{-1}V)$, on a $f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b) \in \lambda\mu^{-1}V + \mu\mu^{-1}V \subset V + V \subset V$ $(a \in A,\ b \in B)$, donc $W(A \cup B, \mu^{-1}V) \subset W(\lambda A + \mu B, V)$. De plus, on a $W(A \cup B, \mu^{-1}V) = W(A, \mu^{-1}V) \cap W(B, \mu^{-1}V)$.

Dans tout ce qui suit, $\mathfrak{S}$ désignera un recouvrement d'un espace localement K-convexe, formé de parties bornées, et satisfaisant aux conditions suivantes: a. les ensembles de $\mathfrak{S}$ sont K-convexes (cf. 4°); *b. si $A \in \mathfrak{S}$, on a $\lambda A \in \mathfrak{S}$ $(\lambda \in K)$* (cf. 3°); *c. il existe un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ formé d'ensembles de la forme $W(A, V)$, où $A \in \mathfrak{S}$, $V \in \mathscr{V}$* (cf. 1°).

Nous désignons par $\mathfrak{T}_s$, $\mathfrak{T}_c$ et $\mathfrak{T}_b$ les $\mathfrak{S}$-topologies sur $\mathscr{L}(E, F)$ définies respectivement par l'ensemble des parties finies de E, par l'ensemble des parties compactes de E et par l'ensemble des parties bornées de E (topologie respectivement de la convergence simple, de la convergence compacte et de la convergence bornée).

L'espace vectoriel des applications de E dans F, muni de la topologie de la convergence simple (qu'on définit comme pour $\mathscr{L}(E, F)$), est un espace vectoriel topologique que nous désignons par F^E. La topologie de F^E induit sur $\mathscr{L}(E, F)$ la topologie $\mathfrak{T}_s$.

Pour une partie H de F^E, $\bar{H}^s$ désigne l'adhérence de H dans F^E.

Définition 4.1. *Une partie H de $\mathscr{L}(E, F)$ est appelée équicontinue si, pour tout $V \in \mathscr{V}$, il existe un voisinage U de 0 dans E tel que $H(U) \subset V$.*

Théorème 4.1. *Soit H une partie de $\mathscr{L}(E, F)$. On a les propositions suivantes :*

1°. *Si H est équicontinue, H est bornée pour $\mathfrak{T}_b$.*
2°. *Si E est un espace K-tonnelé et si H est bornée pour $\mathfrak{T}_s$, H est équicontinue.*
3°. *Si H est équicontinue, $C(H)$ est équicontinu.*
4°. *Si H est équicontinue, on a $\bar{H}^s \subset \mathscr{L}(E, F)$, et $\bar{H}^s$ est équicontinu.*
5°. *Si H est équicontinue, on a $\mathfrak{T}_s|H = \mathfrak{T}_c|H$.*

Démonstration (cf. [9]). 1°. Soit $W(A, V)$ un voisinage de 0 dans $\mathscr{L}(E, F)$ pour $\mathfrak{T}_b$. Il existe un voisinage U de 0 dans E tel que $H(U) \subset V$, et il existe $\lambda \in K$ tel que $A \subset \lambda U$. Alors on a $H(A) \subset H(\lambda U) \subset \lambda V$, donc $H \subset W(A, \lambda V) = \lambda W(A, V)$.

2°. Soient $x \in E$, V un voisinage fermé de 0 dans F. Il existe $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ tel que $H \subset \lambda W(x, V)$, donc

$$\lambda^{-1}x \in T = \bigcap_{f \in H} f^{-1}(V).$$

Il s'ensuit que T est absorbant; en étant K-convexe et fermé, T est un K-tonneau, donc un voisinage de 0 dans E. On en déduit que H est équicontinue. 3° suit immédiatement de la définition de $C(H)$ (def. 2.3.a). Pour 4° et 5°, on peut suivre les démonstrations dans [9] (p. 56, 59).

Remarque. Du théorème 4.1 on peut déduire le théorème de Banach-Steinhaus (cf. [2], p. 27 et [9], p. 68); voir aussi [18].

Dans ce qui suit, nous emploierons le théorème suivant bien connu:

Théorème 4.2. *Pour qu'une partie S de F^E soit relativement compacte dans F^E, il faut et il suffit que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $S(x) = \{f(x) | f \in S\}$ soit relativement compact dans F.*

Démonstration. Cf. N. Bourbaki, Topologie générale, Fascicule de résultats, 1ère édition, p. 47.

Nous désignons $\mathscr{L}(E, K)$ par E', les topologies $\mathfrak{T}_s$ et $\mathfrak{T}_b$ sur E' respectivement par $\sigma(E', E)$ ("topologie faible") et $b(E', E)$ ("topologie forte"), et l'espace vectoriel E', muni de ces topologies, respectivement par E_σ'

("dual faible" de E) et E_b' ("dual fort" de E). Nous emploierons l'adverbe "faiblement" ("fortement") pour désigner des propriétés se rapportant à la topologie faible (forte) sur E'.

Si H est une partie de E', $\bar{H}^\sigma$ désigne l'adhérence de H dans K^E.

Du théorème 4.1 on tire le théorème suivant:

Théorème 4.3. *Soit H une partie de E'. On a les propositions suivantes :*

1°. *Si H est équicontinue, H est fortement bornée.*

2°. *Si E est un espace K-tonnelé et si H est faiblement bornée, H est équicontinue.*

3°. *Si H est équicontinue, on a $\bar{H}^\sigma \subset E'$, et $\bar{H}^\sigma$ est équicontinu.*

4°. *Si H est équicontinue, on a $\sigma(E', E)|H = \mathfrak{T}_c|H$.*

Remarques. 1. Nous caractériserons plus loin (coroll. 1 du th. 4.15), à l'aide d'une réciproque du th. 4.3, 2°, les espaces K-tonnelés sur un corps complet sphérique.

2. Si $\bar{H}$ est l'adhérence d'une partie H de E' dans E_σ', on a $\bar{H} = \bar{H}^\sigma \cap E'$. Si H est une partie équicontinue de E', on a $\bar{H} = \bar{H}^\sigma$ (th. 4.3, 3°).

Théorème 4.4.a. *Supposons que K soit un corps local. Pour toute partie équicontinue H de E', l'ensemble $\bar{H}^\sigma$ est faiblement compact.*

b. *Supposons que K soit complet sphérique. Pour toute partie K-convexe et équicontinue H de E', l'ensemble $\bar{H}^\sigma$ est faiblement c-compact.*

Démonstration. a. H est fortement bornée (th. 4.3, 1°), donc faiblement bornée; il s'ensuit que $H(x)$ est borné, donc relativement compact, dans K ($x \in E$). D'après le théorème 4.2, H est relativement compacte dans K^E, donc $\bar{H}^\sigma$ est faiblement compact.

b. $H(x)$ est K-convexe, donc c-compact, dans K ($x \in E$) (th. 2.6). D'après un théorème analogue au théorème de Tychonoff (voir [20]) H est contenue dans une partie A K-convexe et c-compacte de K^E; comme K^E est un espace localement K-convexe, A est une partie fermée de K^E. Il s'ensuit que $\bar{H}^\sigma \subset A$; $\bar{H}^\sigma$ est donc c-compact dans K^E. On en déduit que $\bar{H}^\sigma$ est faiblement c-compact.

Le théorème 4.4.a n'est plus valable si on remplace "un corps local" par "un corps complet sphérique":

Théorème 4.4.c. *Supposons que K soit complet sphérique et que K ne soit pas un corps local. Alors, pour tout espace localement K-convexe E, il existe un ensemble équicontinu H dans E' tel que $\bar{H}^\sigma$ n'est pas faiblement compact.*

Démonstration. Soit A une partie bornée et non relativement compacte de K; soit $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$ tel que $|A| \leqslant a$. Soient $x_0 \in E$ et $p \in \Gamma$ tels que $p(x_0) \neq 0$. Pour tout $\alpha \in A$, définissons la forme linéaire f_α sur $[x_0]$ par $f_\alpha(\lambda x_0) = \lambda\alpha$ ($\lambda \in K$); alors on a

$$|f_\alpha(\lambda x_0)| = |\lambda\alpha| \leqslant a|\lambda| = a \cdot (p(x_0))^{-1} \cdot p(\lambda x_0) \quad (\alpha \in A,\ \lambda \in K).$$

D'après le théorème 3.5 il existe une forme linéaire continue f_α^* sur E, prolongeant f_α, telle que $|f_\alpha^*(x)| \leqslant a\cdot(p(x_0))^{-1}\cdot p(x)$ $(\alpha \in A,\ x \in E)$. Posons $H=\{f_\alpha^* | \alpha \in A\}$. Pour tout voisinage $V=\{\beta \in K|\ |\beta| \leqslant \varepsilon\}$ de 0 dans K il existe un voisinage U de 0 dans E, savoir $U=\{x \in E | p(x) \leqslant \varepsilon a^{-1} p(x_0)\}$, tel que $H(U) \subset V$; H est donc équicontinu. On a $H(x_0)=\{f_\alpha^*(x_0)|\alpha \in A\}=A$, donc $H(x_0)$ n'est pas relativement compact dans K. On en déduit que H n'est pas relativement compact dans K^E (th. 4.2), donc $\bar{H}^\sigma$ n'est pas faiblement compact.

Remarque. Supposons que K ne soit pas un corps local et que K ne soit pas complet sphérique. Alors il existe un espace localement K-convexe E de dimension finie et un ensemble équicontinu H dans E' tels que $\bar{H}^\sigma$ n'est pas faiblement compact: on peut prendre $E=K$; définissons, pour tout $\alpha \in A$, la forme linéaire continue f_α sur K par $f_\alpha(\lambda)=\lambda\alpha$ $(\lambda \in K)$ et posons $H=\{f_\alpha|\ \alpha \in K\}$, $V=\{\beta \in K|\ |\beta| \leqslant \varepsilon\}$, $U=\{\lambda \in K|\ |\lambda| \leqslant \varepsilon a^{-1}\}$. On a $H(U) \subset V$, donc H est équicontinu; $H(1)=A$, donc H n'est pas relativement compact dans K^E.

§ 2. *Ensembles Γ-fermés.*

Définition 4.2. *On dit qu'une partie A de E est Γ-fermée si, pour tout $x \in E$, $x \notin A$, il existe une semi-norme $p \in \Gamma$ telle que $p(A) \leqslant 1$, $p(x) > 1$.*

Exemples. 1. L'ensemble $\{x \in E | p(x) \leqslant \varepsilon\}$, où $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, $p \in \Gamma$, est Γ-fermé.

2. Soit f une forme linéaire continue sur E. On a $|f(x+y)| \leqslant \max(|f(x)|, |f(y)|)$ $(x, y \in E)$, donc l'application $x \to |f(x)|$ est une semi-norme n.a. continue sur E, à valeurs dans W_K. L'ensemble $\{x \in E|\ |f(x)| \leqslant \varepsilon\}$, où $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, est Γ-fermé.

Théorème 4.5.a. *L'intersection d'une famille de parties Γ-fermées de E est Γ-fermée.*

b. *Une partie Γ-fermée de E est K-convexe et fermée.*

Démonstration. a. Soit B l'intersection d'une famille $\mathscr{B}$ de parties Γ-fermées de E. Soit $x_0 \in E$, $x_0 \notin B$. Il existe $A \in \mathscr{B}$ tel que $x_0 \notin A$, et $p \in \Gamma$ avec $p(x_0) > 1$, $p(A) \leqslant 1$, donc $p(B) \leqslant 1$. Il s'ensuit que B est Γ-fermée.

b. Soient A une partie Γ-fermée de E, et $x, y \in A$. Supposons $\lambda x + \mu y \notin A$, où $\lambda, \mu \in K$, $|\lambda| \leqslant 1$, $|\mu| \leqslant 1$. Alors il existerait $p \in \Gamma$ avec $p(A) \leqslant 1$ et $p(\lambda x + \mu y) > 1$, d'où $1 < p(\lambda x + \mu y) \leqslant \max(p(x), p(y)) \leqslant 1$, ce qui est absurde. A est donc K-convexe. Si $x_0 \notin A$, il existe $p \in \Gamma$ avec $p(x_0) > 1$, $p(A) \leqslant 1$. Posons $U=\{x \in E | p(x-x_0) < 1\}$; on a $p(x)=\max(p(x-x_0), p(x_0)) > 1$ $(x \in U)$, donc $U \cap A = \varnothing$. Il s'ensuit que A est fermée.

Remarques. 1. La réunion de deux ensembles Γ-fermés n'est pas nécessairement Γ-fermée: soit Q_2 le corps des nombres 2-adiques. Considérons $Q_2 \times Q_2$ comme espace vectoriel sur Q_2; cet espace, muni de la norme $(x, y) \to \|(x, y)\| = \max(|x|_2, |y|_2)$ $((x, y) \in E$; $x \to |x|_2$ étant la valuation de $Q_2)$, est un espace vectoriel normé n.a. que nous appelons E.

Définissons les semi-normes n.a. continues p, q sur E par $p(x, y) = |x|_2$, $q(x, y) = |y|_2$ $((x, y) \in E)$, et posons $A = \{(x, y) \in E | p(x, y) \leqslant 1\}$, $B = \{(x, y) \in E | q(x, y) \leqslant 1\}$; A et B sont Γ-fermés. On a $(0, \frac{1}{2}) \in A$, $(\frac{1}{2}, 0) \in B$, $p(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = q(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2$, donc $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \notin A \cup B$. Il s'ensuit que l'ensemble $A \cup B$ n'est pas Q_2-convexe, donc il n'est pas Γ-fermé (th. 4.5.b).

2. Un ensemble Γ-fermé n'est pas nécessairement borné: l'ensemble A de la remarque 1 n'est pas borné dans E.

Chaque partie de E est contenue dans un ensemble Γ-fermé, savoir E. D'après le théorème 4.5.a, nous pouvons donner la définition suivante:

Définition 4.3. *L'enveloppe Γ-fermée $\tilde{A}$ d'une partie A de E est le plus petit ensemble Γ-fermé dans E contenant A.*

$\tilde{A}$ est l'intersection de la famille des ensembles Γ-fermés dans E contenant A. Évidemment, on a:

Théorème 4.6.a. *Pour que A soit Γ-fermé, il faut et il suffit que $A = \tilde{A}$.*
b. *Si $A \subset B \subset E$, on a $\tilde{A} \subset \tilde{B}$.*

Théorème 4.7.a. *Supposons que K soit complet sphérique. Soient A une partie Γ-fermée de E et $x_0 \in E$, $x_0 \notin A$. Alors il existe $f \in E'$ avec $|f(x_0)| > 1$, $|f(A)| \leqslant 1$.*

Démonstration. Il existe $p \in \Gamma$ avec $p(A) \leqslant 1$, $p(x_0) > 1$, et $\lambda_0 \in K$ avec $1 < |\lambda_0| \leqslant p(x_0)$ (si la valuation de K est discrète, il existe $\lambda_0 \in K$ tel que $|\lambda_0| = p(x_0)$). Définissons une forme linéaire f sur $[x_0]$ par $f(\lambda x_0) = \lambda\lambda_0$ $(\lambda \in K)$; on a $|f(\lambda x_0)| = |\lambda\lambda_0| = |\lambda| p(x_0) = p(\lambda x_0)$. D'après le théorème 3.5 il existe une forme $f^* \in E'$, prolongeant f, telle que $|f^*(x)| \leqslant p(x) \leqslant 1$ $(x \in A)$ et $|f^*(x_0)| = |\lambda_0| > 1$.

Théorème 4.7.b. *Soit A une partie de E, et supposons que, pour tout $x_0 \in E$, $x_0 \notin A$, il existe $f \in E'$ avec $|f(x_0)| > 1$, $|f(A)| \leqslant 1$. Alors A est Γ-fermée.*

Démonstration. Soit $x_0 \in E$, $x_0 \notin A$. Il existe $f \in E'$ avec $|f(x_0)| > 1$, $|f(A)| \leqslant 1$. L'application $x \to p(x) = |f(x)|$ $(x \in E)$ est une semi-norme n.a. continue sur E, et on a $p(x_0) = |f(x_0)| > 1$, $p(A) \leqslant 1$. A est donc Γ-fermée.

Corollaire. Supposons que K soit complet sphérique et que la valuation de K soit discrète. Des théorèmes 3.10 et 4.7.b on déduit que toute partie fermée K-convexe de E est Γ-fermée.

Théorème 4.8. *Supposons que K soit complet sphérique. Soit A une partie de E, et posons $\Gamma_A = \{p \in \Gamma | p(A) \leqslant 1\}$, $\Phi_A = \{f \in E' |\ |f(A)| \leqslant 1\}$. Alors on a:*

1°. *Si $\Gamma_A = \emptyset$, on a $\tilde{A} = E$; si $\Gamma_A \neq \emptyset$, on a*

$$\tilde{A} = \bigcap_{p \in \Gamma_A} \{x \in E | p(x) \leqslant 1\}.$$

2°. *Si $\Phi_A = \emptyset$, on a $\tilde{A} = E$; si $\Phi_A \neq \emptyset$, on a*

$$\tilde{A} = \bigcap_{f \in \Phi_A} \{x \in E |\ |f(x)| \leqslant 1\}.$$

3°. *Si A est bornée et si* $m_p = \sup_{x \in A} p(x)$ $(p \in \Gamma)$, *on a*

$$\tilde{A} = \bigcap_{p \in \Gamma} \{x \in E | p(x) \leqslant m_p\}.$$

Démonstration. 1°. Supposons que $\Gamma_A \neq \emptyset$; posons $B = \bigcap_{p \in \Gamma_A} \{x \in E | p(x) \leqslant 1\}$. D'après le théorème 4.5.a, B est Γ-fermé, donc $\tilde{A} \subset B$. Soit $x_0 \in E$, $x_0 \notin \tilde{A}$; il existe $p \in \Gamma$ avec $p(x_0) > 1$ et $p(\tilde{A}) \leqslant 1$. Il s'ensuit que $p(A) \leqslant 1$, donc $p \in \Gamma_A$. On voit que $x_0 \notin B$, d'où $B \subset \tilde{A}$.

Si $\Gamma_A = \emptyset$, comme $\tilde{A}$ est Γ-fermé on a $\tilde{A} = E$.

2°. Supposons que $\Phi_A \neq \emptyset$; posons $C = \bigcap_{f \in \Phi_A} \{x \in E |\, |f(x)| \leqslant 1\}$. D'après le théorème 4.5.a, C est Γ-fermé, donc $\tilde{A} \subset C$. Soit $x_0 \in E$, $x_0 \notin \tilde{A}$; d'après le théorème 4.7.a il existe $f \in E'$ avec $|f(x_0)| > 1$ et $|f(\tilde{A})| \leqslant 1$. Il s'ensuit que $|f(A)| \leqslant 1$, donc $f \in \Phi_A$. On voit que $x_0 \notin C$, d'où $C \subset \tilde{A}$.

Si $\Phi_A = \emptyset$, comme $\tilde{A}$ est Γ-fermé on a $\tilde{A} = E$ (th. 4.7.a).

3°. Supposons que A soit bornée; posons $D = \bigcap_{p \in \Gamma} \{x \in E | p(x) \leqslant m_p\}$. D'après le théorème 4.5.a, D est Γ-fermé, donc $\tilde{A} \subset D$. Soit $x_0 \in E$, $x_0 \notin \tilde{A}$; il existe $p \in \Gamma$ avec $p(x_0) > 1$, $p(\tilde{A}) \leqslant 1$. Comme $p(A) \leqslant 1$, on a $m_p \leqslant 1$. On en déduit que $x_0 \notin D$, donc $D \subset \tilde{A}$.

Corollaire. Si A est une partie bornée de E, $\tilde{A}$ est borné et $\tilde{A}$ est le plus petit ensemble Γ-fermé et borné dans E contenant A ($\tilde{A}$ est l'intersection de la famille des ensembles Γ-fermés et bornés dans E contenant A).

Théorème 4.9. *Soient $\mathfrak{T}$ une $\mathfrak{S}$-topologie sur E', $\mathfrak{T}'$ la $\tilde{\mathfrak{S}}$-topologie sur E', où $\tilde{\mathfrak{S}} = \{\tilde{A} | A \in \mathfrak{S}\}$. On a $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'$.*

Démonstration. D'après le corollaire du théorème 4.8, $\tilde{\mathfrak{S}}$ est un recouvrement de E formé de parties bornées. Soient $A \in \mathfrak{S}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, $V = \{\alpha \in K |\, |\alpha| \leqslant \varepsilon\}$, $f \in W(A, V) = \{f \in E' | f(A) \subset V\}$, et soit $x_0 \in E$ tel que $|f(x_0)| > \varepsilon$. L'application $x \to \varepsilon^{-1}|f(x)|$ $(x \in E)$ est une semi-norme n.a. continue p sur E, et on a $p(A) \leqslant 1$, $p(x_0) > 1$; d'après le théorème 4.8 on a $x_0 \notin \tilde{A}$. Il s'ensuit $|f(\tilde{A})| \leqslant \varepsilon$, donc $f \in W(\tilde{A}, V)$. On en tire que $W(A, V) = W(\tilde{A}, V)$ $(A \in \mathfrak{S})$.

Corollaire. On peut supposer que les ensembles de $\mathfrak{S}$ sont Γ-fermés.

§ 3. *Dualité.*

Supposons que K soit complet sphérique. Pour tout $x \in E$, définissons l'application F_x de E' dans K par $F_x(f) = f(x)$ $(f \in E')$; F_x est une forme linéaire continue sur E_σ', donc $F_x \in (E_\sigma')'$ $(x \in E)$. D'après le théorème 3.9, l'application $x \to F_x$ de E dans $(E_\sigma')'$ est biunivoque.

Théorème 4.10. *L'application $x \to F_x$ est une application de E sur $(E_\sigma')'$.*

Démonstration (cf. [9], p. 73). Soit $B \in (E_\sigma')'$; B est une application continue pour $\sigma(E', E)$. Soit $V = \{f \in E' |\, |f(x_i)| \leqslant \varepsilon\ (i = 1, \ldots, n)\}$, où $x_i \in E$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, un voisinage de 0 pour $\sigma(E', E)$ tel que

$|B(V)| \leqslant 1$. Supposons que $x_1, \ldots, x_k$ soient linéairement indépendants et que $x_{k+1}, \ldots, x_n$ soient des combinaisons linéaires des $x_1, \ldots, x_k$. Soient $\lambda_{il} \in K$ $(i=1, \ldots, k;\ l=k+1, \ldots, n)$ et $x_l = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{il}\, x_i$ $(l=k+1, \ldots, n)$; posons

$$a = \max\,(1, \max_{\substack{k+1 \leqslant l \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant k}} |\lambda_{il}|).$$

Si $W = \{f \in E' \mid |f(x_i)| \leqslant \varepsilon a^{-1}\ \ (i=1, \ldots, k)\}$, on a $|B(W)| \leqslant 1$. L'espace $L_m = [x_1, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}, \ldots, x_k]$ est un sous-espace de dimension finie de E; comme K est complet, L_m est fermé dans E $(m=1, \ldots, k)$ (voir [1], p. 28). D'après le théorème 3.11 il existe $f_m \in E'$ avec $f_m(x_m)=1$, $f_m(x_i)=0$ pour $i=1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, k$ $(m=1, \ldots, k)$. Posons $x_0 = \sum_{m=1}^{k} B(f_m)x_m$; si $f \in E'$, $f \in [f_1, \ldots, f_k]$, on a $B(f)=f(x_0)$. Si $f \in E'$, $f(x_i)=0$ $(i=1, \ldots, k)$, on a $\alpha f \in W$, donc $|\alpha|\ |B(f)| \leqslant 1$ $(\alpha \in K)$; il s'ensuit que $B(f)=0=f(x_0)$.

Soit, enfin, f un élément quelconque de E'; posons $h = \sum_{m=1}^{k} f(x_m)f_m$ et $g=f-h$. On a $g(x_i)=0$ $(i=1, \ldots, k)$; d'après ce que nous venons de démontrer, on a donc $B(g)=g(x_0)$, $B(h)=h(x_0)$, d'où $B(f)=B(g+h)=f(x_0)$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que K soit complet sphérique. D'après le théorème 4.10 nous pouvons donc identifier les espaces vectoriels $(E'_\sigma)'$ et E. La topologie $\mathfrak{T}_s$ sur $(E'_\sigma)'$ induit sur E une topologie que nous indiquons par $\sigma(E, E')$ ("topologie affaiblie" sur E, appelée aussi "topologie faible" sur E; nous emploierons l'adverbe "faiblement" pour désigner des propriétés se rapportant à la topologie affaiblie sur E). Nous désignons par E_σ l'espace vectoriel E muni de la topologie $\sigma(E, E')$. Toute $f \in E'$ est continue pour $\sigma(E, E')$, donc E_σ et E'_σ sont les duals faibles l'un de l'autre.

Nous disons qu'une topologie $\mathfrak{T}$ sur E est *compatible avec la dualité entre E et E'* (*(E, E')-compatible*) si $\mathfrak{T}$ est localement K-convexe et si l'espace vectoriel E' est le dual de l'espace obtenu en munissant l'espace vectoriel E de la topologie $\mathfrak{T}$. La topologie $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine sur E qui est (E, E')-compatible.

Définition 4.4. *Pour toute partie A de E, on appelle polaire de A dans E', et on désigne par A^0, l'ensemble $\{f \in E' \mid |f(A)| \leqslant 1\}$.*

Remarque. A^0 est identique à l'ensemble Φ_A, défini dans le théorème 4.8.

Nous appelons *σ-tonneau* toute partie de E' qui est un K-tonneau dans E'_σ.

Théorème 4.11. *Soient A, B des parties de E. On a les propositions suivantes :*

1°. *Si $A \subset B$, on a $B^0 \subset A^0$.*

2°. *A^0 est une partie Γ-fermée de E'_σ, donc A^0 est une partie K-convexe et faiblement fermée de E'.*

3°. *Si A est bornée, A^0 est une partie absorbante de E'.*

4°. *Si A est bornée, A^0 est un σ-tonneau.*

5°. *Si A est absorbante, A^0 est une partie faiblement bornée de E'.*

6°. *Si U est un voisinage de 0 dans E, U^0 est faiblement c-compact.*

7°. *Si K est un corps local et si U est un voisinage de 0 dans E, U^0 est faiblement compact.*

8°. $(\tilde{A})^0 = A^0$.

Démonstration. 1° est une conséquence immédiate de la définition 4.4. 2°. Soit $f \in E'$, $f \notin A^0$; il existe $x_0 \in A$ tel que $|f(x_0)| > 1$. On a $x_0 \in (E_\sigma')'$, et $|x_0(f)| = |f(x_0)| > 1$; il s'ensuit que $|A^0(x_0)| \leqslant 1$, donc $|x_0(A^0)| \leqslant 1$. D'après le théorème 4.7.b, A^0 est Γ-fermé dans E'_σ. 3°. Soit $f \in E'$. Il existe un voisinage U de 0 dans E et $\lambda \in K$ tels que l'on a $|f(U)| \leqslant 1$ et $A \subset \lambda U$, donc $f \in \lambda A^0$. 2° et 3° entraînent 4°. 5°. Soit $V = \{f \in E' \mid |f(x_i)| \leqslant \varepsilon \ (i=1, \dots, n)\}$, où $n \in \mathbf{N}$, $x_i \in E$ $(i=1, \dots, n)$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, un voisinage de 0 dans E'_σ. Il existe $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ tel que $x_i \in \lambda A$ $(i=1, \dots, n)$. Si $\mu \in K$, $0 < |\mu| \leqslant \varepsilon$, on a $|(\mu\lambda^{-1}A^0)(x_i)| \leqslant \varepsilon$ $(i=1, \dots, n)$, donc $\mu\lambda^{-1}A^0 \subset V$ ou bien $A^0 \subset \lambda\mu^{-1}V$. 6°, 7°. On a $|U^0(U)| \leqslant 1$, donc U^0 est équicontinu; U^0 est une partie K-convexe et faiblement fermée (2°), donc faiblement c-compacte (th. 4.4.b), de E'. Si K est un corps local, U^0 est faiblement compact (th. 4.4.a). 8°. On a $A \subset \tilde{A}$, donc $(\tilde{A})^0 \subset A^0$ (1°). Si $f \in E'$, $|f(A)| \leqslant 1$, on a $|f(\tilde{A})| \leqslant 1$ (th. 4.8, 2°), donc $A^0 \subset (\tilde{A})^0$.

Théorème 4.12. *Soit $\mathfrak{T}$ une $\mathfrak{S}$-topologie sur E'. L'ensemble $\{A^0 \mid A \in \mathfrak{S}\}$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathfrak{T}$.*

Démonstration. D'après notre définition d'une $\mathfrak{S}$-topologie, si $A \in \mathfrak{S}$ l'ensemble A^0 est un voisinage de 0 dans E' pour $\mathfrak{T}$. Si $W(A, V)$, où $A \in \mathfrak{S}$, $V = \{\alpha \in K \mid |\alpha| \leqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, est un voisinage de 0 dans E' pour $\mathfrak{T}$, et si $\lambda \in K$, $0 < |\lambda| \leqslant \varepsilon$, on a: $(\lambda^{-1}A)^0 \subset W(A, V)$.

Corollaire. Des théorèmes 4.11, 4° et 4.12 on déduit: pour la topologie $b(E', E)$ il existe un système fondamental de voisinages de 0 formé de σ-tonneaux.

Définition 4.5. *Pour toute partie A de E, on appelle bipolaire de A, et on désigne par A^{00}, l'ensemble $\{x \in E \mid |A^0(x)| \leqslant 1\}$.*

Nous remarquons que A^{00} est le polaire de A^0 dans $(E'_\sigma)' = E$.

Théorème 4.13. *Soit A une partie de E. On a:*

1°. $A^{00} = \tilde{A}$.

2°. *Pour que A soit Γ-fermée dans E, il faut et il suffit que $A = A^{00}$.*

Démonstration. Le théorème est une conséquence immédiate du théorème 4.8, 2°.

Théorème 4.14. *Supposons que la valuation de K soit discrète; soit A une partie de E. Alors on a:*

1°. $A^{00} = \overline{C(A)}$.

2°. *Si A est K-convexe et fermée dans E, on a $A = A^{00}$.*

Démonstration. Supposons que A soit K-convexe et fermée dans E. D'après le corollaire du théorème 4.7.b, A est Γ-fermée; d'après le théorème 4.13, 2° on a donc $A = A^{00}$. Si A est une partie quelconque de E, l'ensemble $\overline{C(A)}$ est K-convexe et fermé (th. 2.1), donc Γ-fermé, dans E; il s'ensuit que $\tilde{A} \subset \overline{C(A)}$. Comme l'ensemble $\tilde{A}$ est K-convexe et fermé dans E, on a aussi $\overline{C(A)} \subset \tilde{A}$. On en déduit que $\overline{C(A)} = \tilde{A} = A^{00}$ (th. 4.13, 1°).

Théorème 4.15. *Supposons que la valuation de K soit dense. Soit A une partie fermée K-convexe de E. Alors, pour tout $\alpha \in K$ tel que $|\alpha| > 1$, on a $A^{00} \subset \alpha A$.*

Démonstration. Soient $\alpha \in K$, $|\alpha| > 1$ et $x_0 \in E$, $x_0 \notin \alpha A$. Alors on a $\alpha^{-1}x_0 \notin A$, donc il existe $f \in E'$ tel que $|f(A)| \leqslant 1$, $f(\alpha^{-1}x_0) = 1$ (th. 3.10), donc $|f(x_0)| = |\alpha| > 1$. Il s'ensuit que $x_0 \notin A^{00}$ (th. 4.8, 2°); on a donc $A^{00} \subset \alpha A$.

Corollaire. 1. Nous pouvons maintenant démontrer une réciproque du théorème 4.3, 2°: supposons que, dans E', tout ensemble faiblement borné soit équicontinu; alors E est un espace K-tonnelé.

Soit A un K-tonneau dans E. A^0 est faiblement borné (th. 4.11, 5°) dans E', donc équicontinu; il s'ensuit qu'il existe un voisinage U de 0 dans E tel que $|A^0(U)| \leqslant 1$, donc $U \subset A^{00}$. D'après les théorèmes 4.14 et 4.15, il existe $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ tel que $A^{00} \subset \alpha A$; on a donc $\alpha^{-1}U \subset A$. Il en résulte que A est un voisinage de 0 dans E.

2. Soit A une partie K-convexe compacte de E. D'après les théorèmes 4.14 et 4.15 il existe $\alpha \in K$ tel que $\tilde{A} = A^{00} \subset \alpha A$; il en résulte que $\tilde{A}$ est compact.

Étudions maintenant les topologies (E, E')-compatibles. Nous désignons par $\mathfrak{T}$ un recouvrement de E, formé de parties bornées, et non nécessairement satisfaisant aux conditions a, b, c du § 1 (auxquelles satisfait un recouvrement $\mathfrak{S}$). On définit la $\mathfrak{T}$-topologie $\mathfrak{G}_{\mathfrak{T}}$ sur E' comme dans le § 1. Si $\mathfrak{T}$ satisfait aux conditions a, b, c mentionnées, nous appelons $\mathfrak{G}_{\mathfrak{T}}$ une $\mathfrak{S}$-topologie. Observons que, comme $(E'_\sigma)' = E$, nous pouvons considérer sur E des $\mathfrak{T}$-topologies, où $\mathfrak{T}$ est un recouvrement de E'.

Théorème 4.16. *Soit $\mathfrak{G}$ une topologie (E, E')-compatible.*

1°. *$\mathfrak{G}$ est une $\mathfrak{S}$-topologie, où $\mathfrak{S}$ est formé de parties K-convexes, faiblement c-compactes et faiblement bornées de E'.*

2°. *Supposons que K soit un corps local. Alors $\mathfrak{G}$ est une $\mathfrak{S}$-topologie, où $\mathfrak{S}$ est formé de parties K-convexes et faiblement compactes de E'* (cf. [2], p. 68).

Démonstration. Soit $\mathcal{U}$ le système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathfrak{G}$ formé des ensembles $\{x \in E \mid p(x) \leqslant 1\}$, où $p \in \Gamma$. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, U^0 est faiblement borné dans E' (th. 4.11, 5°). Soit $f \in E'$; f est continue pour la topologie $\mathfrak{G}$, donc il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $|f(U)| \leqslant 1$, donc $f \in U^0$. Il s'ensuit que $\mathfrak{T} = \{U^0 \mid U \in \mathcal{U}\}$ est un recouvrement de E'. Tout $U \in \mathcal{U}$

est Γ-fermé dans E, donc $U = U^{00}$ (th. 4.13, 2°); on en déduit que $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$. Soit $W(U^0, V)$, où $U \in \mathscr{U}$, $V = \{\alpha \in K \mid |\alpha| \leqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, un voisinage de 0 pour la topologie $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$. Si $\lambda \in K$, $0 < |\lambda| \leqslant \varepsilon$, on a $\lambda U \subset W(U^0, V)$; comme $\lambda U \in \mathscr{U}$, on voit que $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}} \subset \mathfrak{T}$. Il en résulte que $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$.

Tout élément A de $\mathfrak{X}$ est K-convexe, faiblement c-compact et faiblement borné dans E'; si K est un corps local, tout élément A de $\mathfrak{X}$ est K-convexe et faiblement compact (th. 4.11). Soit $\mathfrak{S} = \{C(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \mid n \in \mathbf{N},\ A_i \in \mathfrak{X}\ (i = 1, \ldots, n)\}$. On a $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$, et tout élément A de $\mathfrak{S}$ est K-convexe, faiblement c-compact (th. 2.5) et faiblement borné (th. 2.7); si K est un corps local, A est faiblement compact (th. 2.5).

Théorème 4.17. *Soit $\mathfrak{X}$ un recouvrement de E' formé de parties K-convexes, faiblement c-compactes et faiblement bornées.*

Il existe un recouvrement $\mathfrak{S}$ de E' formé de parties K-convexes, faiblement c-compactes et faiblement bornées, tel que $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$, et $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ est (E, E')-compatible.

Démonstration (cf. [2], p. 69). Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble formé des ensembles $C(\bigcup_{i=1}^{n} \lambda_i A_i)$, où $n \in \mathbf{N}$, $\lambda_i \in K$, $A_i \in \mathfrak{X}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Les éléments de $\mathfrak{S}$ sont K-convexes, faiblement c-compacts (th. 2.5) et faiblement bornés (th. 2.7). On a $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$, et l'ensemble $\{A^0 \mid A \in \mathfrak{S}\}$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ (th. 4.12), A^0 étant le polaire de A dans E. Soit F le dual de l'espace E quand on munit E de la topologie $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$. Toute partie finie de E' est contenue dans un ensemble de $\mathfrak{S}$, donc $\sigma(E, E') \subset \mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$, d'où $E' \subset F$.

Soit $f \in F$; f est continue pour $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$, donc il existe $A \in \mathfrak{S}$ tel que $|f(A^0)| \leqslant 1$. Il s'ensuit que f appartient au polaire de A^0 dans F, c'est-à-dire au bipolaire B de l'ensemble A dans F. A est K-convexe et c-compact pour $\sigma(E', E)$, et $\sigma(F, E) | E' = \sigma(E', E)$, donc A est c-compact aussi pour $\sigma(F, E)$; A est donc K-convexe et fermé dans F pour $\sigma(F, E)$. D'après les théorèmes 4.14, 2° et 4.15, il existe $\alpha \in K$ tel que $B \subset \alpha A \subset E'$; on en déduit que $f \in E'$. On a donc $F \subset E'$, d'où $E' = F$. Il s'ensuit que $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ est (E, E')-compatible.

Comme dans le cas classique, nous désignons par $\tau(E, E')$ (et nous appelons topologie de Mackey sur E) la $\mathfrak{S}$-topologie sur E, $\mathfrak{S}$ étant formé des parties K-convexes et faiblement compactes de E'; nous désignons par $\tau_c(E, E')$ la $\mathfrak{S}$-topologie sur E, $\mathfrak{S}$ étant formé des parties K-convexes, faiblement c-compactes et faiblement bornées de E'.

Théorème 4.18.a. *$\tau_c(E, E')$ est la topologie la plus fine sur E qui est (E, E')-compatible.*

b. *Si K est un corps local, $\tau(E, E')$ est la topologie la plus fine sur E qui est (E, E')-compatible.*

Démonstration. Le théorème est une conséquence immédiate des théorèmes 4.16 et 4.17.

Remarque. Supposons que K soit un corps local; soit $\mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$ une topologie (E, E')-compatible, où $\mathfrak{T}$ est un recouvrement de E' formé de parties faiblement bornées de E'. Alors tout $A \in \mathfrak{T}$ est relativement compact pour $\sigma(E', E)$: le polaire A^0 de A dans E est un voisinage de 0 dans E pour $\mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$, donc A^{00} est faiblement compact (th. 4.11, 7°), et $A \subset A^{00}$ (th. 4.13, 1°), A^{00} étant le bipolaire de l'ensemble A dans E'_σ.

Cependant, si K n'est pas un corps local, il existe un recouvrement $\mathfrak{T}$ de E' formé de parties faiblement bornées, tel que pas tous les éléments de $\mathfrak{T}$ sont relativement compacts pour $\sigma(E', E)$ et que $\mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$ est (E, E')-compatible: soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties K-convexes, faiblement c-compactes et faiblement bornées de E'; on a $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}} = \tau_c(E, E')$. D'après le théorème 4.4. c il existe un ensemble H dans E' tel que H est équicontinu pour $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ et non relativement compact dans E'_σ. Soit $\mathfrak{T} = \mathfrak{S} \cup \{H\}$; on a $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}} \subset \mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$, et il existe un voisinage U de 0 dans E pour $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ tel que $|H(U)| \leqslant 1$. Il s'ensuit que U est contenu dans le polaire H^0 de H dans E. On a donc $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}} = \mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$; d'où l'on voit que $\mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$ est (E, E')-compatible.

Théorème 4.19. *Les ensembles Γ-fermés dans E sont les mêmes pour toutes les topologies (E, E')-compatibles.*

Démonstration. Le théorème est une conséquence immédiate des théorèmes 4.6.a et 4.8, 2°.

Théorème 4.20.a. *Soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ deux topologies (E, E')-compatibles, A une partie de E K-convexe et fermée dans E pour $\mathcal{T}_1$, $\bar{A}$ l'adhérence de A dans E pour $\mathcal{T}_2$. Pour tout $\alpha \in K$, $|\alpha| > 1$ on a $\bar{A} \subset \alpha A$.*

b. *Supposons que la valuation de K soit discrète. Les ensembles K-convexes fermés dans E sont les mêmes pour toutes les topologies (E, E')-compatibles* (cf. [2], p. 67).

Démonstration. a. D'après les théorèmes 4.14, 2° et 4.15, on a $A^{00} \subset \alpha A$ pour tout $\alpha \in K$, $|\alpha| > 1$, A^{00} étant le bipolaire de l'ensemble A dans E quand on munit E de la topologie $\mathcal{T}_1$. A^{00} est une partie faiblement fermée de E (th. 4.11, 2°); comme $\sigma(E, E') \subset \mathcal{T}_2$, A^{00} est fermé dans E pour $\mathcal{T}_2$. Pour tout $\alpha \in K$, $|\alpha| > 1$, on a donc $\bar{A} \subset A^{00} \subset \alpha A$.

b. L'assertion suit du théorème 4.14: si la valuation de K est discrète, pour qu'une partie A de E soit K-convexe et fermée dans E, il faut et il suffit que $A = A^{00}$.

Théorème 4.21. *Les ensembles bornés dans E sont les mêmes pour toutes les topologies (E, E')-compatibles* (cf. [2], p. 70).

Démonstration. Soit $\mathcal{T}$ une topologie (E, E')-compatible. D'après le théorème 4.16, 1°, $\mathcal{T}$ est une $\mathfrak{S}$-topologie, $\mathfrak{S}$ étant formé de parties K-convexes, faiblement c-compactes et faiblement bornées de E'. Comme produit d'espaces complets, K^E est complet. Tout $A \in \mathfrak{S}$ est fermé dans K^E; il s'ensuit que A est une partie complète de K^E, donc aussi de E'_σ. $\mathfrak{S}$ est donc formé de parties K-convexes, complètes et bornées de E'_σ.

Comme dans [2] (p. 70; les démonstrations sont valables aussi dans notre cas. Voir aussi [18], p. 124) on démontre que dans E tout ensemble A, borné pour $\sigma(E, E')$, est borné pour $\mathfrak{T}$.

Soit $\mathfrak{T}'$ une autre topologie (E, E')-compatible. Toute partie de E, bornée pour $\mathfrak{T}'$, est bornée pour $\sigma(E, E')$, donc aussi pour $\mathfrak{T}$.

Théorème 4.22. *Soit E un espace métrisable ou K-tonnelé. Alors la topologie sur E est identique à $\tau_c(E, E')$; si K est un corps local, la topologie sur E est la topologie de Mackey* (cf. [2], p. 70, 71).

Démonstration. Soient $\mathfrak{T}$ la topologie sur un espace métrisable E, $\mathfrak{T}'$ une topologie (E, E')-compatible sur E. Raisonnons par l'absurde; soit U un voisinage de 0 dans E pour $\mathfrak{T}'$ qui ne soit pas un voisinage de 0 dans E pour $\mathfrak{T}$. Soit $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$ un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 pour $\mathfrak{T}$ et soit $\lambda_n \in K$, $|\lambda_n| = \varrho^{-n}$ $(n \in \mathbf{N})$. Aucun des ensembles $\lambda_n V_n$ n'est contenu dans U, donc pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe $x_n \in E$ tel que $x_n \notin U$, $x_n \in \lambda_n V_n$. On a $\lambda_n{}^{-1} x_n \to 0$ pour $\mathfrak{T}$; l'ensemble $\{\lambda_n{}^{-1} x_n | n \in \mathbf{N}\}$ est donc borné dans E pour $\mathfrak{T}$, donc pour $\mathfrak{T}'$ (th. 4.21). Il s'ensuit qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\lambda_n{}^{-1} x_n \in \lambda U$, d'où $x_n \in \lambda_n \lambda U$ $(n \in \mathbf{N})$. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $|\lambda_n \lambda| < 1$; on a $x_{n_0} \in U$, contrairement à l'hypothèse. On en déduit que $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}$. L'assertion suit maintenant du théorème 4.18.

Soient $\mathfrak{T}$ la topologie sur un espace K-tonnelé E, $\mathfrak{T}'$ une topologie (E, E')-compatible sur E. Soit A une partie K-convexe, faiblement c-compacte et faiblement bornée de E'. D'après le théorème 4.3, 2°, A est équicontinue; il existe donc un voisinage U de 0 dans E pour $\mathfrak{T}$ tel que $|A(U)| \leqslant 1$, donc U est contenu dans le polaire A^0 de A dans E. On en déduit que $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}$ (th. 4.16, 1°). L'assertion suit maintenant du théorème 4.18.

Remarque. Soit $\mathfrak{T}$ la topologie sur un espace K-tonnelé E. D'après le théorème 4.16, 1°, $\mathfrak{T}$ est une $\mathfrak{S}$-topologie, $\mathfrak{S}$ étant formé de parties K-convexes et faiblement bornées de E'; tout $A \in \mathfrak{S}$ est donc équicontinu (th. 4.3, 2°). Si B est une partie équicontinue de E', il existe un voisinage U de 0 dans E pour $\mathfrak{T}$ tel que U est contenu dans le polaire B^0 de B dans E. Il s'ensuit que $\mathfrak{T}$ est identique à la $\mathfrak{T}$-topologie sur E, $\mathfrak{T}$ étant formé des parties équicontinues de E'.

On peut renforcer le corollaire du théorème 4.12:

Théorème 4.23. *Les σ-tonneaux dans E' forment un système fondamental de voisinages de* 0 *pour* $b(E', E)$.

Démonstration. Soit A un σ-tonneau dans E'. Le polaire A^0 de A dans $E = (E'_\sigma)'$ est faiblement borné dans E (th. 4.11, 5°), donc borné dans E pour la topologie initiale sur E (th. 4.21). Il existe $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ tel que $A^{00} \subset \alpha A$, A^{00} étant le bipolaire de l'ensemble A dans E'_σ (th. 4.14, 2° et 4.15). Il s'ensuit que $\alpha^{-1} A^{00} \subset A$, et l'ensemble $\alpha^{-1} A^{00}$, donc aussi A, est un voisinage de 0 dans E' pour $b(E', E)$.

Soit A une partie de E. Nous appelons A un σ-tonneau si A est un K-tonneau dans E_σ. Évidemment, tout σ-tonneau dans E est un K-tonneau dans E. Soient B un K-tonneau dans E, $\bar{B}$ l'adhérence de B dans E pour $\sigma(E, E')$. Il existe $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ tel que $\bar{B} \subset \alpha B$ (th. 4.20. a), donc $\alpha^{-1}\bar{B} \subset B$; tout K-tonneau dans E contient donc un σ-tonneau dans E (si la valuation de K est discrète, d'après le th. 4.20.b tout K-tonneau dans E est un σ-tonneau dans E). D'après le théorème 4.23 les K-tonneaux dans E forment donc un système fondamental de voisinages de 0 pour la $\mathfrak{T}$-topologie sur E, $\mathfrak{T}$ étant formé des parties faiblement bornées de E'. En particulier, on a:

Théorème 4.24. *Pour que E soit un espace K-tonnelé, il faut et il suffit que la topologie sur E soit la $\mathfrak{T}$-topologie, $\mathfrak{T}$ étant formé des parties faiblement bornées de E'* (cf. [8], p. 259).

§ 4. *Espaces réflexifs.*

Définition 4.6. *On appelle bidual de E, et on désigne par E'', le dual de l'espace E_b'; on a donc $(E_b')' = E''$.*

Tout $x \in E$, considéré comme élément de $(E_\sigma')'$, est une application continue pour $\sigma(E', E)$, donc pour $b(E', E)$; il s'ensuit que $E = (E_\sigma')' \subset E''$.

Définition 4.7. *On appelle E semi-réflexif si l'application $x \to F_x$ de E dans E''* (cf. th. 4.10) *est une application de E sur E''* (*donc si toute forme fortement continue sur E' est faiblement continue*).

Pour que E soit semi-réflexif, il faut et il suffit que $(E_b')' = (E_\sigma')'$, c'est-à-dire que $b(E', E)$ soit (E', E)-compatible.

Théorème 4.25. *Soit E un espace semi-réflexif. Alors on a:*

1°. *E_b' est un espace K-tonnelé, donc l'espace vectoriel E est le dual d'un espace K-tonnelé.*

2°. *Toute partie K-convexe, faiblement fermée et faiblement bornée de E est faiblement c-compacte; si K est un corps local, toute partie faiblement fermée et faiblement bornée de E est faiblement compacte.*

Démonstration. 1°. Soient A un K-tonneau dans E_b', $\bar{A}$ l'adhérence de A dans E' pour $\sigma(E', E)$. A est fermé dans E' pour $b(E', E)$; comme $b(E', E)$ et $\sigma(E', E)$ sont (E', E)-compatibles, il existe $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ tel que $\bar{A} \subset \alpha A$ (th. 4.20.a), donc $\alpha^{-1}\bar{A} \subset A$. L'ensemble $\alpha^{-1}\bar{A}$ est un σ-tonneau dans E' (th. 2.1), donc un voisinage de 0 dans E' pour $b(E', E)$ (th. 4.23). Il s'ensuit que E_b' est un espace K-tonnelé. 2°. Soit A une partie K-convexe, faiblement fermée et faiblement bornée de E. D'après 1° et le théorème 4.3, 2°, A est une partie équicontinue de $E = (E_b')'$. Du théorème 4.4.b on déduit que A est c-compacte pour $\sigma(E, E')$. De la même façon on démontre la deuxième partie de l'assertion.

Théorème 4.26. *Supposons que toute partie K-convexe, faiblement fermée et faiblement bornée de E soit faiblement c-compacte. Alors E est semi-réflexif.*

Démonstration. La topologie $b(E', E)$ est la $\mathfrak{S}$-topologie sur E', $\mathfrak{S}$ étant formé des parties K-convexes, faiblement fermées et faiblement bornées de E (th. 4.21), c'est-à-dire des parties K-convexes, faiblement c-compactes et faiblement bornées de E. Il s'ensuit que $b(E', E) = \tau_c(E', E)$. On en déduit que $b(E', E)$ est (E', E)-compatible (th. 4.18.a), donc E est semi-réflexif.

Définition 4.8. *On dit que E est réflexif s'il est semi-réflexif et si la topologie sur $E = E'' = (E_b')'$ est identique à $b(E, E_b')$. E est donc le bidual fort E_b'' de E, c'est-à-dire le dual fort de E_b'.*

Théorème 4.27. *Tout espace E réflexif est K-tonnelé.*

Démonstration. L'espace E_b' est réflexif, donc E, étant le dual fort de E_b', est un espace K-tonnelé (th. 4.25, 1°).

Théorème 4.28. *Soit E un espace K-tonnelé. Supposons que toute partie K-convexe, faiblement fermée et faiblement bornée de E soit faiblement c-compacte. Alors E est réflexif.*

Démonstration. D'après le théorème 4.26, E est semi-réflexif. Toute partie de E' faiblement bornée est fortement bornée (th. 4.21), donc la topologie sur E est la $\mathfrak{T}$-topologie, $\mathfrak{T}$ étant formé des parties fortement bornées de E' (th. 4.24). On en déduit que E est réflexif.

Corollaire. 1. Un espace de Montel et un espace $(c\mathscr{M})$ sont réflexifs.
2. Supposons que K soit un corps local en que E soit un espace de Montel. Alors E_b' est un espace de Montel (cf. la démonstration dans [2] (p. 91)).

§ 5. *Exemples et applications.*

a. Dans [11] on démontre: supposons que K soit complet. Soit E un espace vectoriel normé n.a., complet, séparable, de dimension infinie sur K, et tel que l'ensemble des valeurs de la norme de E ait 0 comme seul point d'accumulation (la valuation de K est donc discrète). Alors E n'est pas semi-réflexif.

Dans [5] on démontre: supposons que K soit complet et que la valuation de K soit discrète. Soit E un espace vectoriel normé n.a., de dimension infinie sur K, et tel que la norme de E prenne ses valeurs dans W_K. Alors E n'est pas semi-réflexif.

b. Pour les espaces localement K-convexes, non normés, semi-réflexifs la situation est différente:

Théorème 4.29. *Pour tout corps complet sphérique K, il existe un espace localement K-convexe, réflexif, de dimension infinie.*

Démonstration. Soient F et E les espaces des exemples 2 et 5 du chapitre III. Une forme linéaire continue f sur F est déterminée par les $f(\varphi^{(i)}) = \gamma_i$ $(i \in \mathbf{N})$; on vérifie aisément que $(\gamma_i) \in E$. Inversement, si $(\gamma_i) \in E$, par $f(\alpha)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\gamma_i$ (pour $\alpha=(\alpha_i)\in F$) est déterminée une forme linéaire continue sur F: supposons que $\gamma_i=0$ pour $i>n$, alors on a

$$|f(\alpha)|=|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\gamma_i|\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}|\gamma_i|\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant n}p_i(\alpha).$$

L'espace vectoriel F' est donc isomorphe à l'espace vectoriel E.

Toute partie bornée de F est contenue dans un ensemble

$$\{(\alpha_i)\in F|\ |\alpha_i|\leqslant\varepsilon_i\ \ (i\in\mathbf{N})\},\ \text{où}\ \ \varepsilon_i\in\mathbf{R},\ \ \varepsilon_i>0\ \ (i\in\mathbf{N});$$

un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie forte sur $F'=E$ est donc formé des ensembles $\{(\gamma_i)\in E|\ |\gamma_i|\leqslant\varepsilon_i\ \ (i\in\mathbf{N})\}$, où $\varepsilon_i\in\mathbf{R}$, $\varepsilon_i>0$ $(i\in\mathbf{N})$. On a donc $b(F',F)=\mathfrak{T}_\omega$, d'où $E=F_b'$.

Une forme linéaire g sur E est déterminée par un élément $\alpha=(\alpha_i)$ de F, si nous posons $g(\delta^{(i)})=\alpha_i$ $(i\in\mathbf{N})$. Pour que g soit continue sur E, il faut et il suffit que $g|E_n$ soit continue $(n\in\mathbf{N})$ (th. 3.14, 3°); on a

$$|g(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\delta^{(i)})|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\alpha_i|\cdot||\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\delta^{(i)}||_n,$$

donc $E'=F$.

Pour qu'une partie B de E soit bornée pour $\mathfrak{T}_\omega$, il faut et il suffit que B soit contenue dans un ensemble $\{\gamma\in E_n|\ ||\gamma||_n\leqslant\varepsilon\}$, où $n\in\mathbf{N}$, $\varepsilon\in\mathbf{R}$, $\varepsilon>0$ (th. 3.14, 1°). Un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie forte sur $E'=F$ est donc formé des ensembles $\{(\alpha_i)\in F|\ |\alpha_i|\leqslant\varepsilon\ (1\leqslant i\leqslant n)\}$, où $\varepsilon\in\mathbf{R}$, $\varepsilon>0$, $n\in\mathbf{N}$. La topologie $b(E',E)$ est donc déterminée par la famille $\{p_n\mid n\in\mathbf{N}\}$ de semi-normes n.a., où $p_n(\alpha)=|\alpha_n|$ pour $\alpha=(\alpha_i)\in F$ $(n\in\mathbf{N})$. On a donc $(F_b')_b'=F$; on voit que E et F sont des espaces réflexifs et qu'ils sont les duals forts l'un de l'autre.

Remarque. D'après les exemples 7, 8 et 9 du chapitre III, E et F sont des espaces $(c\mathscr{M})$; on déduit donc immédiatement du corollaire 1 du théorème 4.28 qu'ils sont réflexifs. Cependant, la démonstration du théorème 4.29 donnée ci-dessus est encore valable si K n'est pas complet sphérique.

c. Soit M l'espace de l'exemple 3 du chapitre III. Soit $\gamma=(\gamma_i)$, $\gamma_i\in K$ $(i\in\mathbf{Z}^+)$ tel qu'il existe $k_0\in\mathbf{N}$ avec $\sup_n|\gamma_n|\varrho^{-k_0n}<\infty$. Si $\alpha=(\alpha_i)\in M$, on a $|\alpha_n\gamma_n|=|\alpha_n|\varrho^{k_0n}\cdot|\gamma_n|\varrho^{-k_0n}\to 0$ $(n\to\infty)$. Définissons $\gamma(\alpha)=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i\alpha_i$; on a $|\gamma(\alpha)|\leqslant\sup_n|\gamma_n|\varrho^{-k_0n}\cdot p_{k_0}(\alpha)$, donc (γ_i) détermine un élément de M'. Inversement, soit $\gamma\in M'$; γ est déterminé par les $\gamma(\mu^{(i)})=\gamma_i$ $(i\in\mathbf{Z}^+)$. Il existe $k_0\in\mathbf{N}$ et $l\in\mathbf{R}$, $l>0$ tels que $\alpha\in M$, $p_{k_0}(\alpha)\leqslant 1$ entraînent $|\gamma(\alpha)|\leqslant l$. Soit $\alpha^{(n)}\in M$, $|\alpha_n{}^{(n)}|=\varrho^{-k_0n}$, $\alpha_k{}^{(n)}=0$ pour $k\neq n$ $(n\in\mathbf{Z}^+)$. On a $p_{k_0}(\alpha^{(n)})=1$ $(n\in\mathbf{N})$, donc $|\gamma(\alpha^{(n)})|=|\gamma_n|\varrho^{-k_0n}\leqslant 1$ $(n\in\mathbf{Z}^+)$. On en déduit que l'espace vectoriel M' est isomorphe à l'espace vectoriel des suites (γ_i), $\gamma_i\in K$ $(i\in\mathbf{Z}^+)$, telles qu'il existe $k\in\mathbf{N}$ avec $\sup_n|\gamma_n|\varrho^{-kn}<\infty$. Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des parties de M de la forme $\{\alpha\in M|p_n(\alpha)\leqslant l_n\ (n\in\mathbf{N})\}$, où $l_n\in\mathbf{R}$, $l_n>0$ $(n\in\mathbf{N})$.

Toute partie bornée de M est contenue dans un élément de $\mathscr{B}$; un système fondamental de voisinages de 0 pour $b(M', M)$ est donc $\{A^0 | A \in \mathscr{B}\}$.

Déterminons maintenant le dual de M_b'; nous savons que $(M_b')' \supset M$. Si $\nu^{(n)}$ désigne l'élément de M' tel que $\nu_n{}^{(n)} = 1$, $\nu_k{}^{(n)} = 0$ pour $k \neq n$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$, on a $\sum_{i=0}^{n} \gamma_i \nu^{(i)} \to (\gamma_i)$ $(n \to \infty)$ pour $(\gamma_i) \in M'$. Une forme linéaire continue δ sur M_b' est donc déterminée par les $\delta(\nu^{(i)}) = \delta_i$ $(i \in \mathbf{Z}^+)$. Supposons qu'il existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\sup_n |\delta_n| \varrho^{k_0 n} = \infty$. δ est continue sur M_b', donc il existe $A \in \mathscr{B}$, $A = \{\alpha \in M | p_n(\alpha) \leqslant l_n \ (n \in \mathbf{N})\}$ tel que $\gamma \in A^0$ entraîne $|\delta(\gamma)| \leqslant 1$. Soit $n_0 \in \mathbf{Z}^+$ tel que $|\delta_{n_0}| \varrho^{k_0 n_0} > \varrho l_{k_0}$, et soit $\gamma \in M'$ tel que $l_{k_0}^{-1} \varrho^{k_0 n_0 - 1} < |\gamma_{n_0}| \leqslant l_{k_0}^{-1} \varrho^{k_0 n_0}$, $\gamma_i = 0$ pour $i \neq n_0$. Alors, si $\alpha \in A$, on a $|\gamma(\alpha)| = |\gamma_{n_0} \alpha_{n_0}| = |\gamma_{n_0}| \varrho^{-k_0 n_0} \cdot |\alpha_{n_0}| \varrho^{k_0 n_0} \leqslant l_{k_0}^{-1} \cdot l_{k_0} = 1$; d'où $\gamma \in A^0$. D'autre part, on a $|\delta(\gamma)| = |\delta_{n_0} \gamma_{n_0}| = |\delta_{n_0}| \varrho^{k_0 n_0} \cdot |\gamma_{n_0}| \varrho^{-k_0 n_0} > \varrho l_{k_0} \cdot l_{k_0}^{-1} \varrho^{-1} = 1$, ce qui est absurde. Il s'ensuit que l'espace vectoriel $(M_b')'$ est isomorphe à l'espace vectoriel M, donc M est semi-réflexif.

La démonstration ci-dessus est encore valable si K est un corps valué n.a. quelconque, c'est-à-dire non nécessairement complet sphérique.

D'après l'exemple 10 du chapitre III, pour que M soit un espace de Montel, il faut et il suffit que K soit un corps local. Si K est un corps local, on déduit du corollaire 1 du théorème 4.28 que M est réflexif.

d. Soit L l'espace de l'exemple 6 du chapitre III. On déduit du théorème 4.27 que L n'est pas réflexif.

e. Nous donnons la caractérisation des espaces bornologiques, annoncée dans le § 3 du chapitre III: supposons que, pour tout espace localement K-convexe F, toute application linéaire localement bornée de E dans F soit continue. Soient $\mathfrak{T}_1$ la topologie sur E, $\mathscr{V}$ l'ensemble des parties K-convexes de E qui absorbent toutes les parties de E bornées pour $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ la topologie sur E pour laquelle $\mathscr{V}$ est un système fondamental de voisinages de 0. Évidemment, on a $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2$. Soit E_1' (E_2') le dual de E, quand on munit E de la topologie $\mathfrak{T}_1$ $(\mathfrak{T}_2)$; on a $E_1' \subset E_2'$. Toute forme linéaire sur E, continue pour $\mathfrak{T}_2$, est localement bornée, donc continue, pour $\mathfrak{T}_1$; on a donc $E_2' \subset E_1'$. On en déduit que $\mathfrak{T}_2$ est (E, E_1')-compatible.

Soit j l'application identique de E, muni de $\mathfrak{T}_1$, sur E, muni de $\mathfrak{T}_2$. Si B est une partie de E bornée pour $\mathfrak{T}_1$, $j(B)$ est borné pour $\mathfrak{T}_2$ (th. 4.21). On voit que l'application j est localement bornée, donc continue; d'où $\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{T}_1$. On a donc $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$. D'après la définition 3.7, l'espace E, muni de la topologie $\mathfrak{T}_1$, est bornologique. On a donc (th. 3.18):

Théorème 4.30. *Pour que E soit bornologique, il faut et il suffit que, pour tout espace localement K-convexe F, toute application linéaire localement bornée de E dans F soit continue.*

En particulier, du théoréme 4.30 on dèduit que les espaces $(\mathscr{F})$ et les espaces $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ (sur un corps complet sphérique) sont des espaces bornologiques (th. 3.17).

Si, dans la démonstration du théorème 4.30, on remplace la topologie $\mathfrak{T}_1$ par la topologie (E, E_1')-compatible la plus fine $\mathfrak{T}'$, les ensembles bornés restent les mêmes (th. 4.21), et on voit que $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}_1$. On a donc (th. 4.18):

Théorème 4.31. *Soit E un espace bornologique. On a:*

a. *La topologie sur E est identique à $\tau_c(E, E')$.*

b. *Supposons que K soit un corps local. Alors, la topologie sur E est la topologie de Mackey.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki, N., Espaces vectoriels topologiques, Ch. I, II, 1e éd. Hermann & Cie, Paris, 1953.
2. ———, Espaces vectoriels topologiques, Ch. III, IV, V, 1e éd. Hermann & Cie, Paris, 1955.
3. Cohen, I. S., On non-Archimedean normed spaces. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch. **51**, 693–698 (1948).
4. Dieudonné, J. et L. Schwartz, La dualité dans les espaces $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{L}\mathscr{F})$. Ann. Inst. Fourier **1**, 61–101 (1949).
5. Fleischer, I., Sur les espaces normés non-archimédiens. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch. **A 57**, 165–168 (1954).
6. Ingleton, A. W., The Hahn-Banach theorem for non-Archimedean valued fields. Proc. Cambridge Phil. Society **48**, 41–45 (1952).
7. Kaplansky, I., Maximal fields with valuations. Duke Mathematical Journal **9**, 303–321 (1942).
8. Köthe, G., Topologische lineare Räume, I. Springer-Verlag, 1960.
9. Martineau et Treves, Éléments de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions, II. Centre de documentation Universitaire, Paris, 1956.
10. Monna, A. F., Sur les espaces linéaires normés, I, II, III, IV. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch. **49**, 1045–1055, 1056–1062, 1134–1141, 1142–1152 (1946).
11. ———, Sur les espaces linéaires normés, V. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch. **51**, 197–210 (1948).
12. ———, Sur les espaces linéaires normés, VI. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch. **52**, 151–160 (1949).
13. ———, Sur les espaces normés non-archimédiens, I, II. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch. **A 59**, 475–489 (1956).
14. ———, Sur les espaces normés non-archimédiens, III, IV. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch. **A 60**, 459–476 (1957).
15. ———, Ensembles convexes dans les espaces vectoriels sur un corps valué. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch. **A 61**, 528–539 (1958).
16. ———, Espaces localement convexes sur un corps valué. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch. **A 62**, 391–405 (1959).
17. ———, Espaces vectoriels topologiques sur un corps valué. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch. **A 65**, 351–367 (1962).
18. ———, Sur le théorème de Banach-Steinhaus. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch. **A 66**, 121–131 (1963).
19. Schöbe, W., Beiträge zur Funktionentheorie in nichtarchimedisch bewerteten Körpern. Helios-Verlag, Münster, 1930.
20. Springer, T. A., Une notion de compacité dans la théorie des espaces vectoriels topologiques, à paraître dans Proc. Kon. Akad. van Wetensch.